首先是将向量投影到另一个向量所在的直线。

推导相当于 $x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

projection matrix 是 $\frac{aa^T}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

将向量投影变换到一个向量所在直线的矩阵是对称矩阵。让我想起了之前的一个结论，就是满足保距变换的矩阵满足其转置就是其逆，当时只意识到了行向量两两正交，却没意识到行向量模长都是 1。

投影矩阵满足 $P^n = P$。

接下来是将向量投影到一个空间。

我们有 $A\hat{x} + \vec{e} = \vec{b}$（其中 $A\hat{x} = P\vec{b}$）

向量$\vec{e}$ 与矩阵 A 的列空间垂直意味着，$A^T\vec{e} = \mathbf{0}$

这两个方程合在一起就是在说：

$$A^T A\hat{x} = A^T\vec{b}$$

题外话也很棒，跟上节课的结论联系起来了。

现在解出 $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T\vec{b}$，而 $P\vec{b} = A\hat{x}$，可知 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$，这就是将向量投影到空间中的投影矩阵了，将 A **设定成** $\vec{a}$，可以对应

（这里不能把 $(A^T A)^{-1}$ 化成 $A^{-1}(A^T)^{-1}$ 从而把 P 化简成 I，因为 A 不一定是方阵，即使是方阵也不一定有逆！这个阶段还没有学习非方阵的类逆元。不过另一个角度，如果 A 是有逆的方阵说明只需要一个 I 对 $\vec{b}$ 做变换就能把它投影到 A 的列空间中了，进而得知 “把本来就在这个空间的向量投影到这个空间内” 这个 自投影**问题** 的解，就是什么也不做！再进一步推广，那就是将向量投影到空间的投影矩阵 P 依然满足 $P^n = P$）

（这段是我独立推导的，胡哈哈）

现在我仍有疑虑的就是 $(A^T A)^{-1}$ 是否也是对称的，这直接关乎到 $P^T = P$ 的成立。（后来发现很简单，直接用 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 推导就行了）

最小二乘法的例子非常直观，或者说本节的核心方程或许就是从最小二乘法中来的。

所以其实还有一些问题：

1. $A^T A$ 和 AA^T 是否一定有逆？或者说说是否所有空间都能让向量投影上去？

subquestion1: 肯定不一定有逆。

subquestion2: 想象将一个向量投影到不与它共线的一条直线上吧，根本无法完整投影。

2. 基于最小二乘法的例子，一个向量到一个空间的 “垂直投影” 似乎有着什么特殊的意义，它是什么？

b + e = prj(b)

让 e = prj(b) - b 长度最小，或许就是这个意义，因为垂直距离就是最短距离。（这个看上去很显然的结论也隐藏着更深的秘密......）